ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1994

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS

DUREE : 1 heure.

N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.

On note $S = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3}$ (la convergence de cette série étant acquise).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

   a. Montrer que : $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq S - S_n \leq \frac{1}{2n^2}$.

   b. Déterminer le plus petit entier N tel que : $N^2(N+1) \geq 5000$.

   c. En évaluant alors S_N grâce à une calculette, en déduire une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^3}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^3}$.

   a. Démontrer que les deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et vers une même limite L.

   b. Déterminer le plus petit entier positif M tel que :
   $5000(A_M - B_M) \leq 1$.
   Montrer alors que le calcul de A_M permettrait d'obtenir une valeur approchée de L avec une précision que l'on estimera.

c. Exprimer L et $T = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^3}$ en fonction de S, et donner une valeur approchée de T à 10^{-4} près.

3. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $r_k = \frac{50k + 24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$. Vérifier que r_k est aussi égal à : $\frac{1}{k^3} - \left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{11}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\right]$

b. Montrer que pour $k \geq 2$, on a : $r_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{50\,dt}{t^6}$.

c. En déduire une valeur de l'entier $P \geq 1$, tel que : $\sum_{k\geq P+1} r_k \leq 10^{-6}$.

d. En évaluant alors S_p grâce à une calculette, en déduire une valeur approchée de S à 10^{-6} près (on pourra remarquer que : $1 = \frac{(k+2) - k}{2}$, $3 = (k+3) - k$, $11 = \frac{11[(k+4) - k]}{4}$).

4. Soit f l'application définie sur $[0,+\infty[$ par $f(0) = 0$, et :
$\forall x > 0$, $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$.

a. Justifier que f est continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

b. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

c. En calculant pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$, montrer avec soin que : $I = 2S$.

5. Montrer la convergence des intégrales :
$J = \int_0^1 \frac{\ell n^2(t)}{1-t}\,dt$ et $K = \int_0^1 \frac{\ell n(1-t)\,\ell n(t)}{t}\,dt$ et les calculer en fonction de S.

6. Montrer que la série entière g définie par : $g(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^3}$ est solution sur l'intervalle $]0,1[$ d'une équation différentielle du deuxième ordre que l'on précisera, et exprimer g(x) en fonction de : $\int_0^x \frac{\ell n(1-t)\,\ell n(t)}{t}\,dt$ pour x dans $[0,1]$.